Fraktali

Fraktali

Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija celine.

- Nova grana matematike, 19. i početak 20. veka.
- Daje opis mnogih prirodnih oblika (obale, planine, biljke, delovi ljudskog organizma,...)
- Naziv od latinske reči *fractus*, što znači razlomljen ili delić.

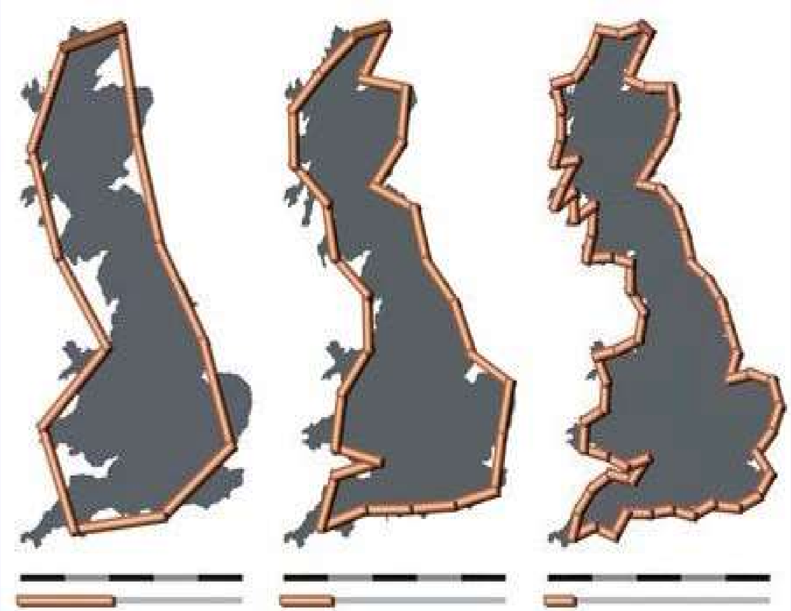
"Oblaci nisu sfere, planine nisu konusi, razuđene obale nisu krugovi, kora drveta nije glatka." (Benoa Mandelbrot)

Gaston Julija (1893–1978)

- Francuski matematičar
- Proučavao funkciju $f(z) = z^2 + c$, i niz $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$, gde su $n \in \mathbb{N}$ i $c \in \mathbb{C}$.
- Kakve su osobine funkcije $f^n(z)$ kada n teži beskonačnosti (gde f^n označava kompoziciju $f \circ ... \circ f$ sa n članova).
- Od interesa su kompleksni brojevi c za koje niz $f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), ...$ ostaje ograničen.
- Za različite vrednosti broja c dobio je grafički prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravni, i ti se skupovi nazivaju po njemu - Julijini skupovi.

Benoit Mandelbrot (1924–2010) – otac fraktalne geometrije

- Rođen u Poljskoj, studirao matematiku, diplomirao na univerzitetima u Francuskoj i SAD-u.
- 1975. dao definiciju fraktala.
- Posmatrao je istu funkciju $f(z)$ i dobijeni niz kao i Julija.
- Stvorio prvu "teoriju hrapavosti", i video je "hrapavost" u oblicima iz prirode (planine, obale i rečni slivovi, strukture biljaka, ...)
- Ideja je bila da stvori matematičku formulu za merenje ukupne "hrapavosti" takvih predmeta u prirodi.
- Rad *"Koliko je duga obala Britanije? Statistička samosličnost i frakcijska dimenzija"* (1967) je jedna od prvih Mandelbrotovih publikacija na temu fraktala. Ispituje paradoks obale: svojstvo da izmerena dužina dela obale zavisi od merila.



Samosličnost

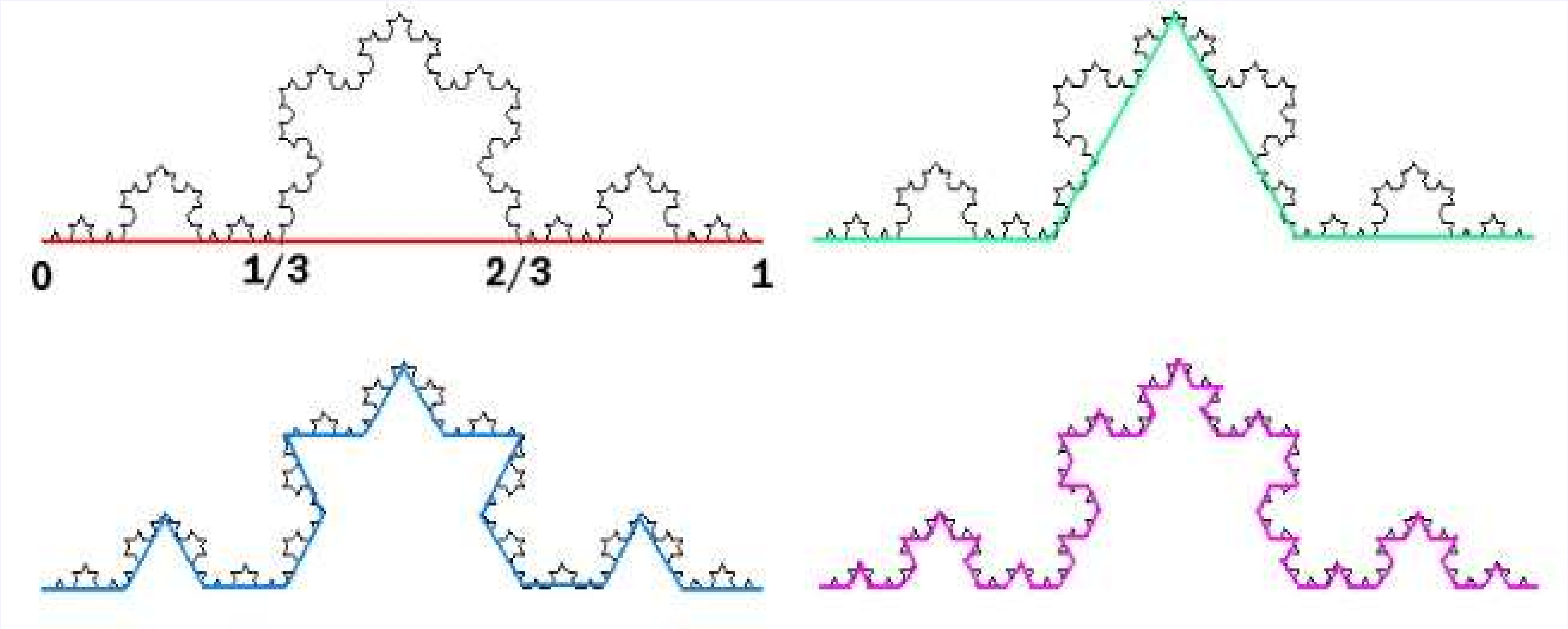
Objekti koji kada se uveličaju sami sebe sadrže.

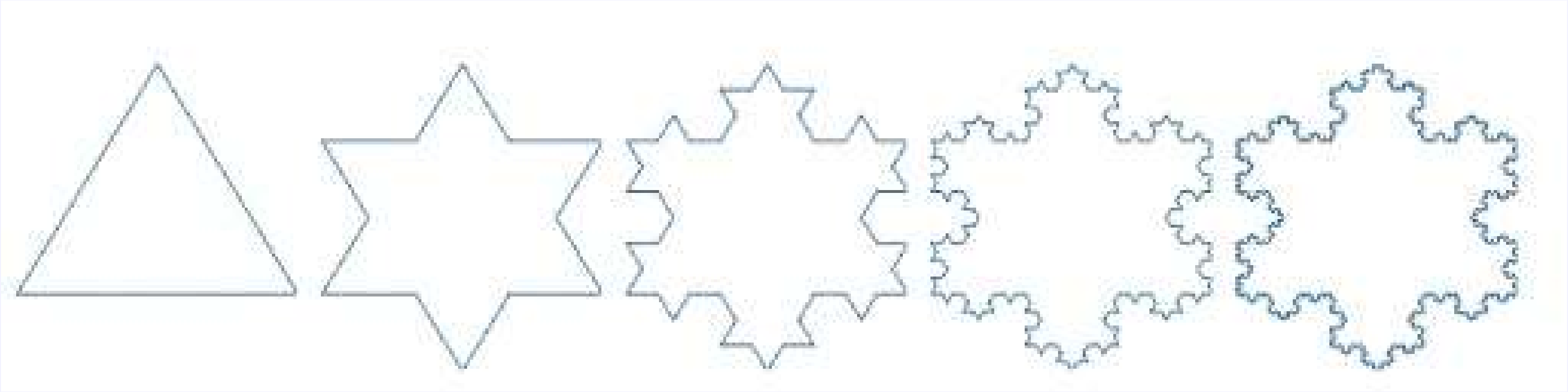
- Potpuno slični fraktali – sadrže kopije koje su slične celom fraktalu (Kohova pahulja, trougao Sierpinskog,...)
- Kvazi samoslični fraktali – fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične celom fraktalu (Mandelbrotov skup, Julijin skup)
- Statistički samoslični fraktali – fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine(fraktalna dimenzija) ostaju iste pri različitim procenama (Peanov šum)

Kohova kriva i pahulja

Helge von Koch (1870 - 1924)

Geometrijska konstrukcija





Da li Kohova kriva u ravni ima konačnu dužinu (obim Kohove pahulje)?

Dužina Kohove krive (obim Kohove pahulje):
$L_n = 3(\frac{4}{3})^n$, gde je n redni broj iteracije.
$\lim\limits_{n\to\infty} 3(\frac{4}{3})^n = \infty$

Da li Kohova pahulja u ravni ima konačnu površinu?

Površina Kohove pahuljice:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{(\frac{a}{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{(\frac{a}{9})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{(\frac{a}{27})^2\sqrt{3}}{4} + ... = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$$

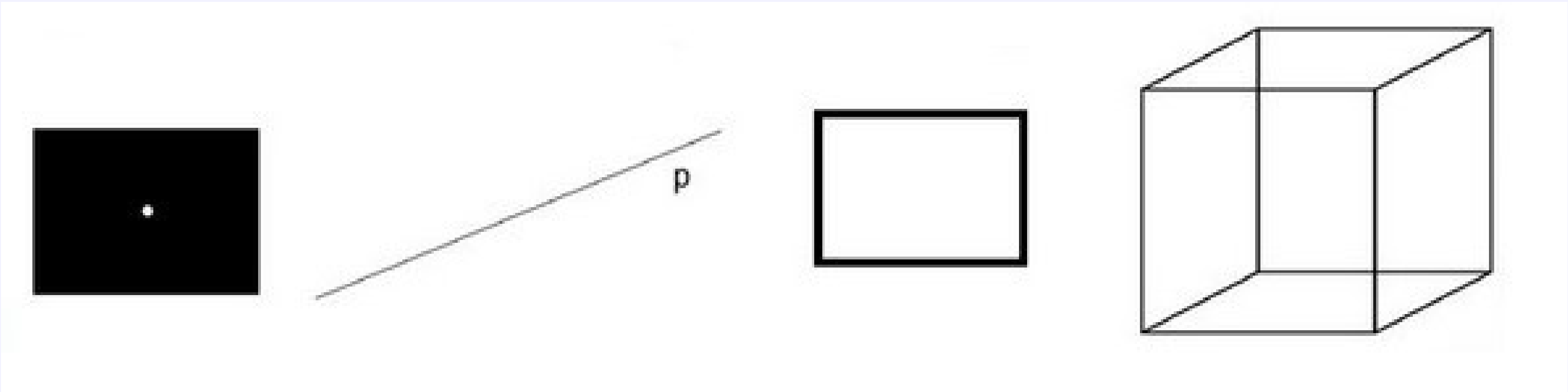
Koja je dimenzija ovog skupa?

Fraktalna dimenzija

Fraktali su objekti čija je fraktalna dimenzija strogo veća nego topoločka.

Topološka dimenzija – broj pravaca kojima bi se mogli kretati da se nalazimo u tom objektu. Uvek je **ceo broj**.

- Tačka - topološka dimenzija 0.
- Prava - topološka dimenzija 1.
- Geometrijski lik – topološka dimenzija 2
- Geometrijsko telo – topološka dimenzija 3.



Fraktalna dimenzija – vrednost koja nam govori o tome u kolikoj meri objekat ispunjava prostor. Opisuje izlomljenost ili hrapavost objekta. Za fraktale uglavnom **nije ceo broj**.

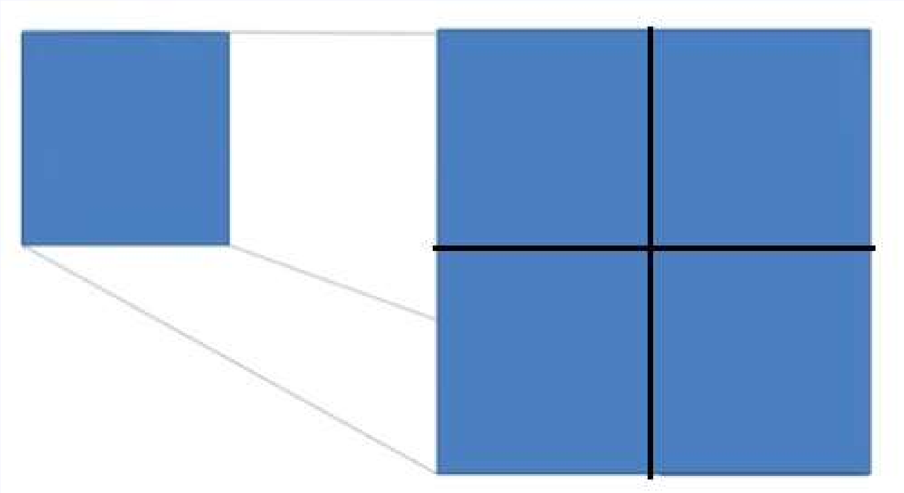
- D - (fraktalna) dimenzija
- N - broj objekata posmatranih nakon smanjenja/uvećanja
- k – faktor smanjenja/uvećanja, $N = k^D$.
- $D = \log_k N = \frac{\ln(N)}{\ln(k)}$

Linija:

Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 2$ kopije polazne duži.

$D = \log_2 2 = 1$

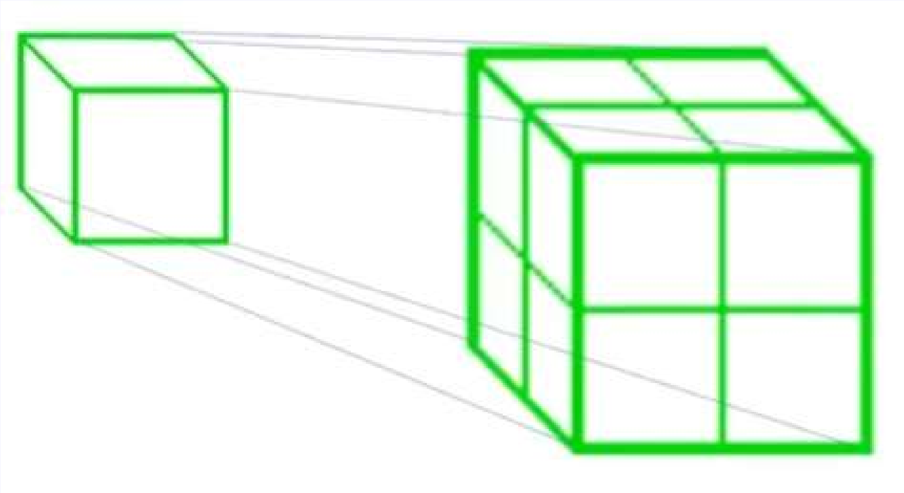
Kvadrat:



Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 4$ kopije polaznog kvadrata.

$D = \log_2 4 = 2$

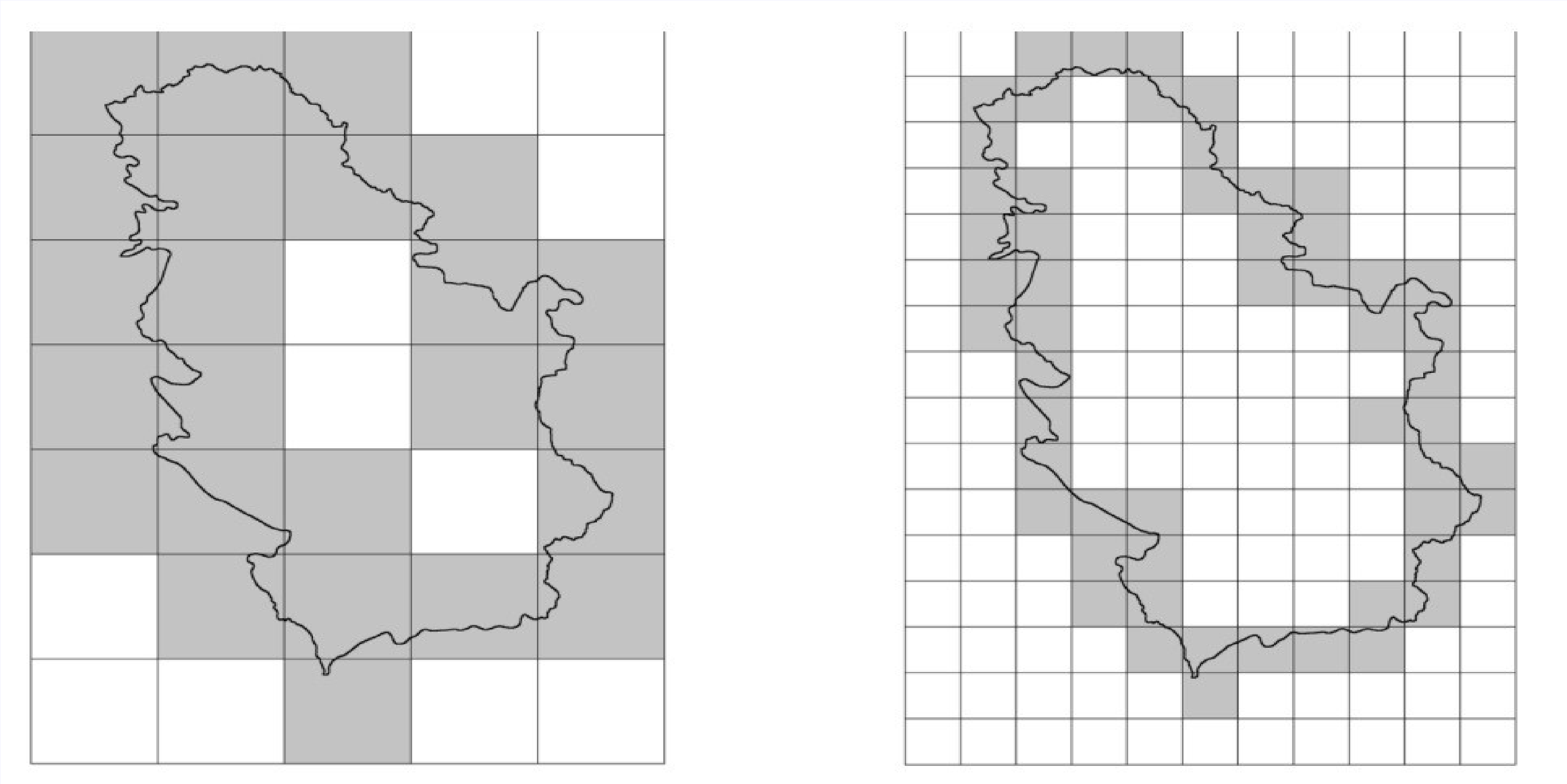
Kocka:



Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 8$ kopija polazne kocke.

$D = \log_2 8 = 3$

Prekrijemo objekat mrežom jednakih kvadrata određene veličine i prebrojimo kvadrate koji u sebi sadrže delove datog objekta.



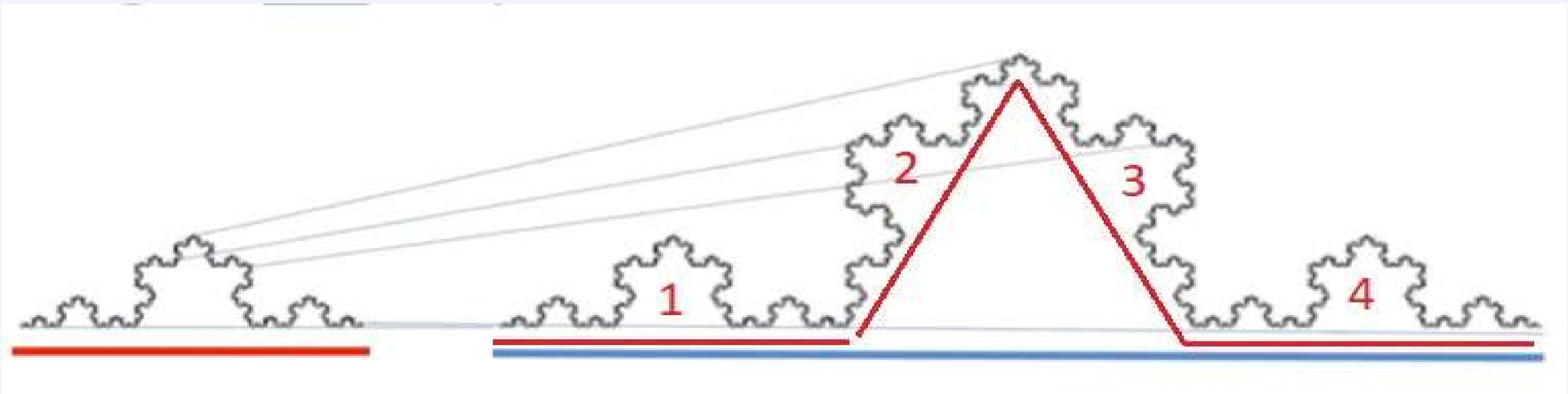
Onda se taj isti objekat prekriva mrežama identičnih kvadrata drugih veličina i postupak se ponavlja.

N - broj popunjenih kvadrata.

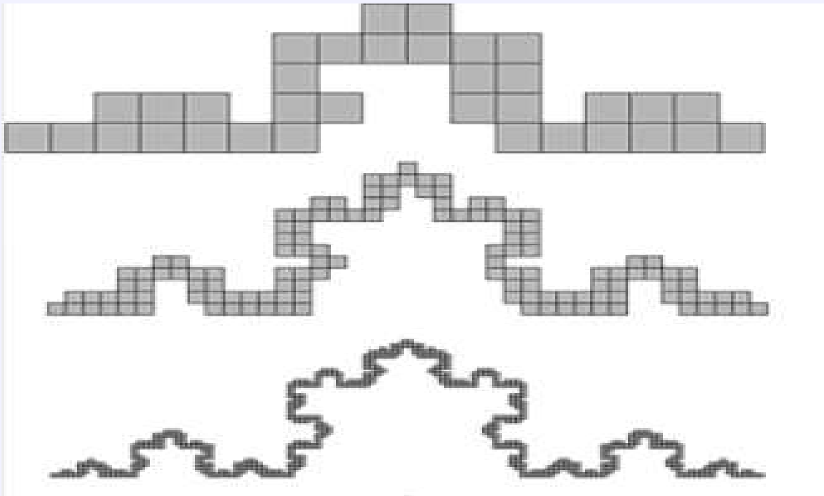
r - veličine kvadrata.

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

Fraktalna dimenzija Kohove krive:



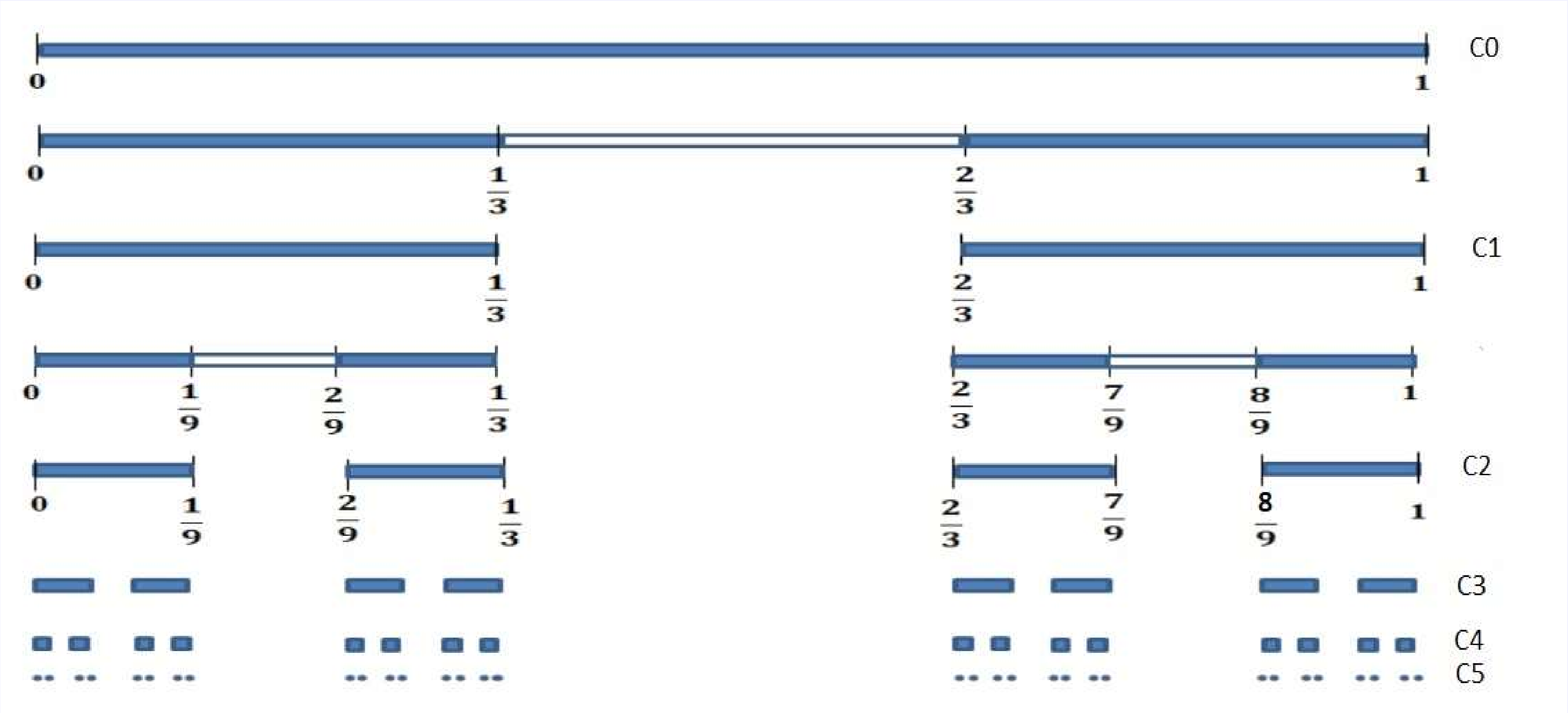
Uvećali smo $k = 3$ puta i dobili $N = 4$ kopije istog objekta.
$D = \log_k N = \log_3 4 \approx 1.262.$



Osobine Kohove pahulje/krive:

- Ograničena figura konačne površine ima beskonačan obim.
- Fraktalna dimenzija je razlomljen broj.
- Neprekidna svuda.
- Nigde nije diferencijabilna.
- Potpuno sličan fraktal.

Kantorov skup (Kantorova prašina)



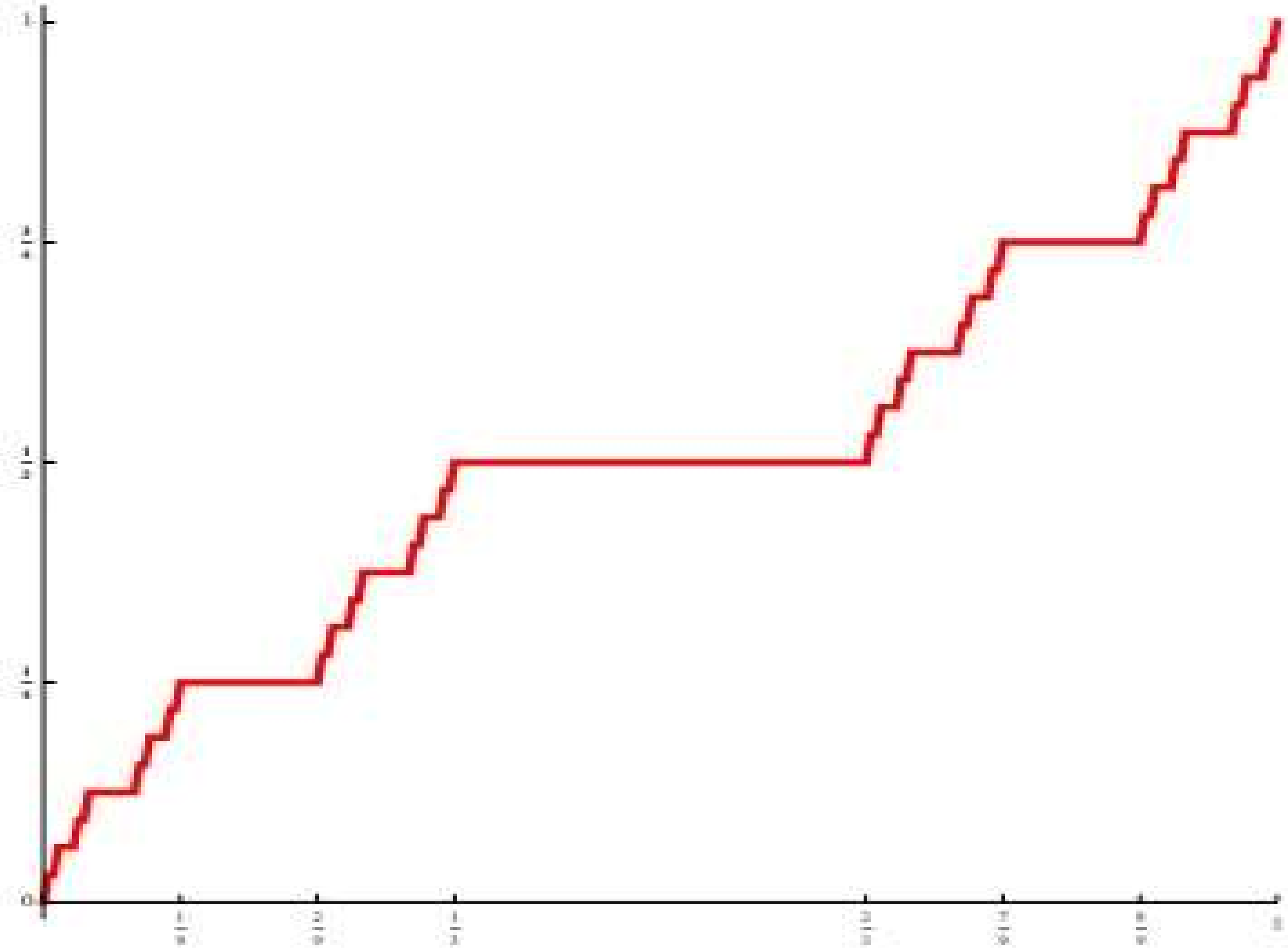
- $C_0 = [0, 1]$
- $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (iz C_0 izbacimo središnji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$)
- $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (iz C_1 izbacimo središnje intervale)
- ...

$$\boxed{\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_n &= \frac{C_{n-1}}{3} \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right) \\ C &= \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \end{aligned}}$$

- $C \neq \emptyset$ (jer je zatvoren)
- C je neprebrojiv (može se dokazati).
- Dužina izbačenih delova:
  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$
- Mera skupa C je 0.
- Fraktalna dimezija skupa:
  broj kvadrata: $N = 2^n$, veličina stranice kvadrata $r = (\frac{1}{3})^n$
  $D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \log_3 2 \approx 0.6309$

Kantorova funkcija (Đavolje stepenice)

- Definišimo $f(0) = 0, f(1) = 1$.
- Na prvom izbačenom intervalu $(1/3, 2/3)$ definišimo $f(x) = 1/2$.
- Za svaki od ostalih izbačenih delova definičimo da je funkcija poluzbir najbližih već definisanih vrednosti sa leve i desne strane.
- Dodefinišimo funkciju $f(x)$ na Kantorovom skupu do neprekidnosti:
  - Za svako $x \in C$ levo od nje $f(x)$ je monotono neopadajuća i ograničena odozgo $\Rightarrow \exists \sup f^-$.
  - Za svako $x \in C$ desno od nje $f(x)$ je monotono nerastuća i ograničena odozdo $\Rightarrow \exists \inf f^+$.
  - Za svako $x \in C$ definišimo $f(x) = \sup f^- = \inf f^+$.



Kantorova funkcija je:

- monotona
- neprekidna
- preslikava $[0, 1]$ na $[0, 1]$
- Tačke $x \in C^c$ (komplement Kantorovog skupa) se slikaju u racionalne brojeve $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, ...)$
- Tačke $x \in C$ se slikaju u iracionalne vrednosti na $[0, 1]$ i neke racionalne.
- Kardinalnost Kantorovog skupa ne može biti manja od kardinalnosti skupa iracionalnih brojeva, a to je kontinuum (iako mu je mera 0).
- $f(x)$ ima skoro svuda izvod jednak 0, iako funkcija nije konstanta.
- Grafik $f(x)$ je fraktalni skup.

Primena? [1]

VELIKO OTKRIĆE

ĐAVOLJE STEPENICE: Mozak ubice funkcioniše po jednoj matematičkoj formuli! Otkrijte kojoj...

LUDI SVET
13.02.2014. 16:45h ▸ 10:54h

Matematičari su utvrdili su da se serijske ubice drže određenog ritma na koji utiče rad neurona u mozgu

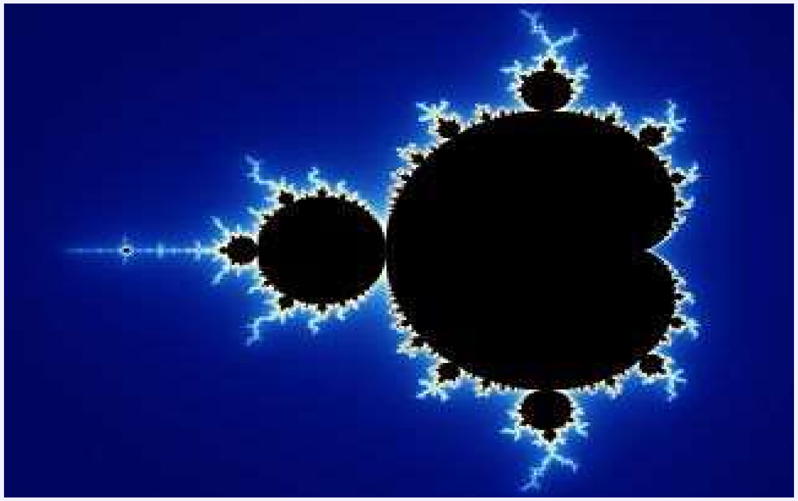
SAD - Dvojica matematičara **M. V. Simkin i V. P. Rojčovduri** sa Univerziteta Kalifornija potvrdili su da je uzorak ubistava koje počine serijski ubice u skladu sa Kantorovom funkcijom, odnosno strogom matematičkom formulom popularno nazvanom "**đavolje stepenice**".

[1] Izvor: Kurir

Mandelbrotov skup

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0, \; c \in \mathbb{C}$$

Ukoliko postoji konstanta M takva da je $|z_n| < M$ (niz z_n je ograničen) za svako $n = 1, 2, ...$ onda tačka $c = a + ib$ pripada Mandelbrotovom skupu.



- Ako tačka c pripada Mandelbrotovom skupu bojimo je u jednu boju (npr. crnu).
- U suprotnom, ako tačka c ne pripada Mandelbrotovom skupu bojimo je u drugu boju (npr. belu).
- Opcija sa više boja: boja tačke c koja ne pripada skupu se određuje kao $\min\{n \in \mathbb{N} : |z_n| > M\}$

Mandelbrotov skup

Ako je $|z_n| > 2, \ (M = 2)$, *onda niz divergira.*

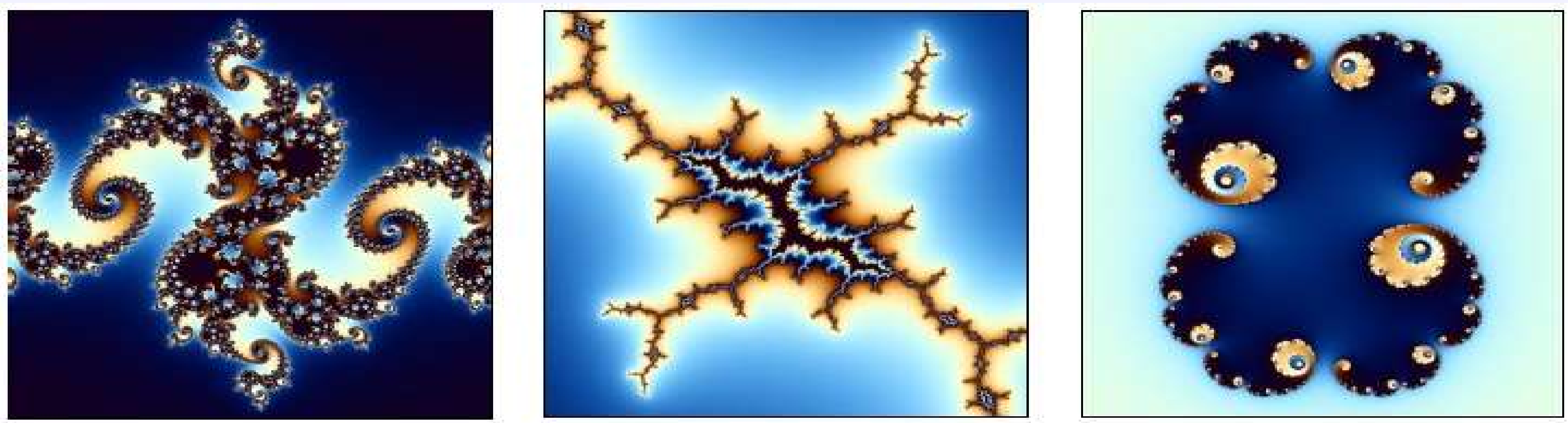
Za svaki piksel c posmatra se niz $f_c(0), f_c^2(0), f_c^3(0), ..., f_c^N(0)$, gde je c kompleksan broj određen pikselom, a N maksimalan broj iteracija. Ako je navedeni niz ostao ograničen kružnicom poluprečnika $R = 2$, tada smatramo da tačka c pripada Mandelbrotovom skupu. U suprotnom smo sigurni da ona ne pripada Mandelbrotovom skupu.

- Jedinstven
- Ograničen skup
- Beskonačan obim
- Povezan skup
- Kvazi samosličan (sadrži umanjene kopije sebe, ali one nisu potpuno slične celom fraktalu)

Julija skupovi

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad c \texttt{ fiksirano}, \ z_0 \in \mathbb{C}$$

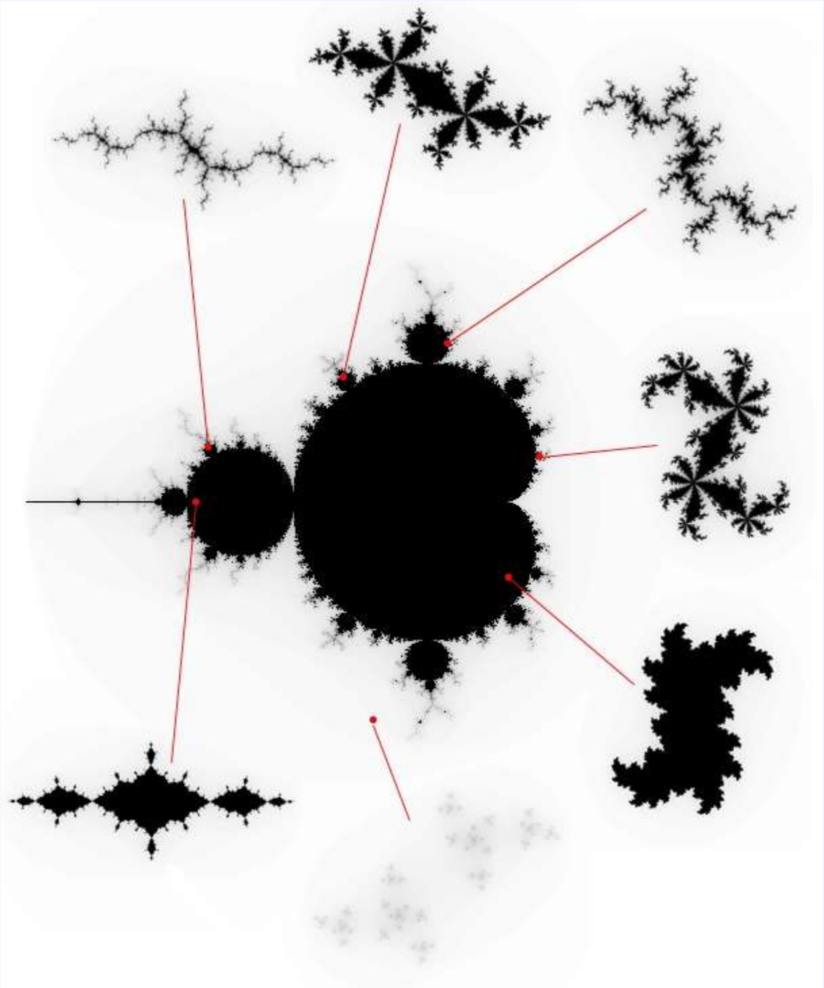
- Princip sličan: fiksiramo c i za svako $z_0 \in \mathbb{C}$ ispitujemo da li je niz z_n ograničen (z_0 pripada Julija skupu - crni piksel) ili neograničen (z_0 ne pripada Julija skupu - beli piksel ili neka boja)



$c = -.79 + .15i$ $c = -.162 + 1.04i$ $c = .3 - .01i$

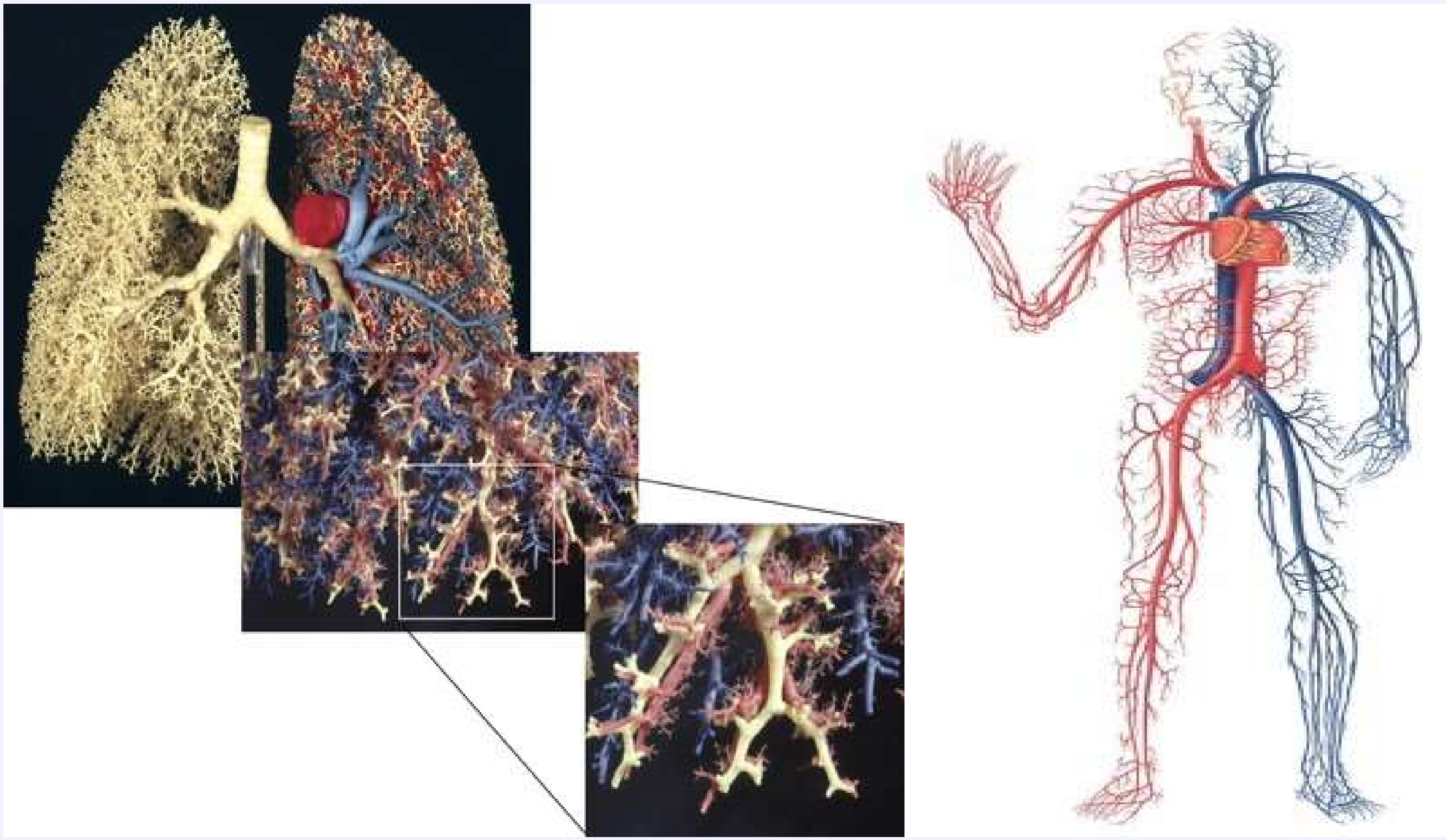
- Ima ih beskonačno mnogo (za svako c imamo drugačiji Julija skup)
- Može biti povezan i nepovezan (za različite c)
- Kvazi samosličan

Veza Julija i Mandelbrot skupova



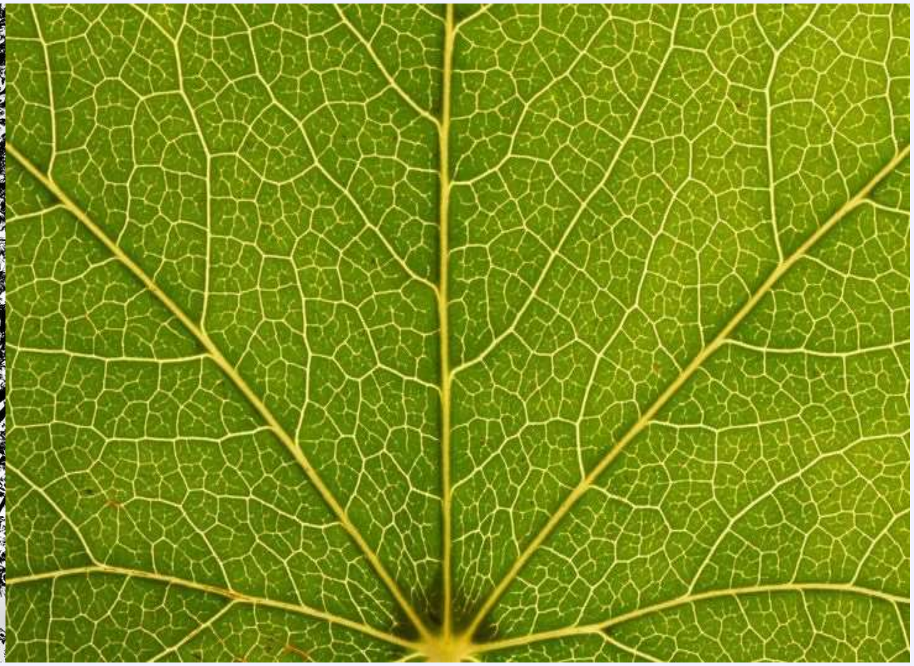
- Julijini skupovi za vrednost c koja pripada Mandelbrotovom skupu su povezani.
- Julijini skupovi za vrednost c koja ne pripada Mandelbrotovom skupu nisu povezani.
- Julijini skupovi za vrednost c koja je dalje od Mandelbrotovog skupa imaju veću fragmentaciju, sve dok ne postanu skoro kao prah.

Živa bića kao fraktali



Grom/struja

Drveće kao fraktali



Biljke kao fraktali


Pejzaži